Entwicklung eines analytischen Modells der Aquifer-Fließgewässer-Interaktion

Peter Burek

1 Einleitung und Zielsetzung

Im Rahmen des DFG-Graduiertenkolleg "Ökologische Wasserwirtschaft" an der Universität Karlsruhe (TH) wird ein Modell des Wasserhaushaltes in Auenlandschaften mit Unterstützung des Verbundprojekts "Morphodynamik der Elbe" entwickelt.

Zur detaillierten Bewertung von wasserbaulichen Maßnahmen im Hinblick auf ökologische Fragestellungen in Auenstandorten, wie z.B. Deichrückverlegung, ist es notwendig die abiotischen Parameter über längere Zeiträume bei bestehenden und mit veränderten Bedingungen zu simulieren. Die statistische Beschreibung der Dynamik verschiedener Wasserhaushaltsgrößen (z.B. Bodenfeuchte- und Grundwasserzustände) in Auenbereichen im mesoskaligen Bereich von 10-1000 km^2 soll aus Langzeitsimulation (> 20 Jahre) eines 2-dimensionalen Wasserhaushaltsmodells bestimmt werden. Dabei soll das Modell die beiden wesentlichen Prozesse beinhalten: den direkten horizontalen Wasseraustausch zwischen Gewässer und Aquifer und die vertikale Wasserbewegung infolge Infiltration bei Überflutung und Niederschlag in der ungesättigten Bodenzone.

Aufgrund des langen Betrachtungszeitraumes und des mesoskaligen Größenbereichs muß das Modell mit einfach zu erhebenden Parametern und vereinfachten physikalischen Modellkonzeptionen arbeiten. Das Grundwassermodell wird deshalb, nicht wie üblicherweise durch die numerische Lösung der Laplace-Gleichung mittels Finiter Elemente bzw. Differenzen, sondern analytisch durch die Linearisierung der Boussinesq-Gleichung berechnet. Die Maßgaben zur vereinfachten Betrachtung als 1D Grundwassermodell oder als Bodenspeichermodell bedeuten aber keinen Verzicht auf physikalisch begründete Teilmodelle.

Anwendung soll das Modell im Rahmen des Verbundprojekts "Morphodynamik der Elbe" zunächst im Bereich der Ohremündung finden.

2 Modell der Aquifer-Fließgewässer-Interaktion

In numerischen Modellen wird die Hydraulik des Vorfluter-Aquifer Systems über die Lösung der Laplace-Gleichung mit der nichtlinearen freien Grundwasseroberflächen-Randbedingung und zeitabhängigen Randbedingungen des betrachteten Gebietes gelöst. Die exakte Laplace-Gleichung wird mittels Finiter Differenzen oder Finiter Elemente berechnet. Die Anwendung dieser Modelle bedeutet einen hohen Aufwand bei der Datenerfassung und Kalibrierung des Modells. In vielen praktischen Fällen wird eine derart detaillierte und Computer-intensive Analyse jedoch nicht benötigt.

Bei der analytischen Lösung wird die Laplace-Gleichung auf eine linearisierte Boussinesq-Gleichung reduziert und der ungespannte Grundwasserfluß in Transsekten normal zum Vorfluter berechnet.

Im Vergleich zur numerischen Lösung beinhaltet die analytische Lösung einen Fehler von kleiner als 10% aufgrund der Vereinfachung durch die Linearisierung, die Dynamik der Wasserstandsänderung wird jedoch durch die analytische Lösung gut erfaßt (Govindaraju und Koelliker 1994). Sie stellt damit eine gute Näherung dar, um die *Dynamik des Systems* zu beschreiben, falls die Informationsdichte über einen Aquifer ungenügend ist oder die Aquifereigenschaften als Zufallsfunktionen interpretiert werden sollen.

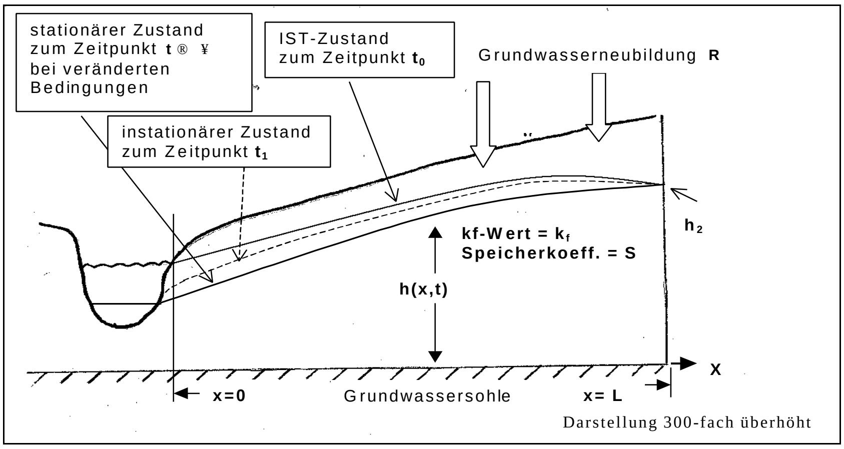


Abb. 1. Schematischer Schnitt durch den Aquifer

Das einfachste Modell zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs des Grundwasserflusses ist die linearisierte Boussinesq-Gleichung mit Dupuit-Annahmen und zeitlich veränderlichen Randbedingungen. Für den rechten Rand kann eine Bedingung 1.Art (Piezometerhöhe wird vorgegeben) oder 2.Art (Zufluß wird vorgegeben) gewählt werden. Hier wurde als Beispiel die Randbedingung 2. Art gewählt.

$$T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = S\frac{\partial h}{\partial t} - R$$

$$h(0,t) = h_1(t)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(L_x, t) = c$$

$$h(x,0) = h_0(x)$$

T: Transmissivität [m^2/s]
S: Speicherkoeffizient (effektive Porösität) [-]
R: Zufluß zum Grundwasser aus dem Niederschlag [m/s]
x: Strömungsrichtung des Grundwassers normal zum Vorfluter [m]
h(x,t): Piezometerhöhe zum Ort x und zur Zeit t [m]
h_1(t): Linke zeitabhängige Randbedingung (Vorfluter) [m]
h_2(t): Rechte Randbedingung mit c = Zufluß [m^3/s] pro m Rand
h_0(x): Piezometerverteilung über x zum Zeitpunkt t_0 [m] (Anfangsbedingung)
L_x: Horizontale Dimension des Aquifers [m]

Aufgrund der Linearität der Boussinesq-Gleichung kann die Lösung in zwei verschiedene Komponenten aufgeteilt werden. In einen stationären Anteil $V(x)$ und einen instationären Anteil $u(x,t)$. Die Lösung der Gleichung kann als Summe der beiden Komponenten ausgedrückt werden (Powers 1979): h(x,t) = V(x) + u(x,t).

Der stationäre Anteil $V(x)$ entspricht der stationären Lösung, jedoch im Fall der zeitlich veränderlichen Randbedingungen ist auch $V(x)$ eine zeitabhängige Funktion:

$$T\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -R \qquad \text{mit: } V(0) = h_1(t) \text{ und } V(L_x) = \frac{\partial h_2}{\partial x}(L_x) = c$$

mit der Lösung:

$$V(x) = -\frac{R}{2T}x^2 + \frac{RL_x}{T}x + \frac{c}{T}x + h_1$$

Der instationäre Anteil u(x,t) erfüllt die folgenden Bedingungen:

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -S\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{mit: } u(o,t) = h_1(t) - h_1(0),\ u(L_x,t) = \frac{\partial h_2}{\partial x}(L_x,t) = c \text{ und}$$

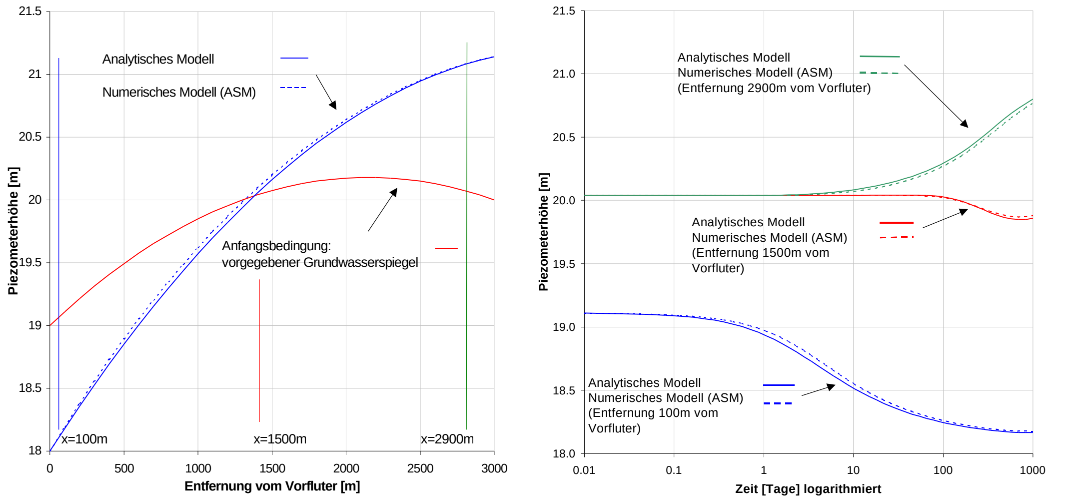
$$u(x,0) = h_0(x) - V(x)$$

Die Lösung wird nach Hall und Mönch 1972, Workman et. al. 1997 über Separation der Variablen und Linearkombination ermittelt:

$$u(x,t) = \frac{2}{L_x}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{L_x}\left(h_0 - V(x)\right)\cdot\sin(\lambda_n x)dx\right]\cdot\sin(\lambda_n x)\cdot\exp\left(\frac{-\lambda_n^2 Tt}{S}\right)$$

mit $\quad \lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L_x} \qquad n = 1,2,3,....$

3 Erste Modellrechnung



Stationäre Bedingung:
Grundwasserspiegel nach Absenkung des Vorfluterwasserstandes von 19m auf 18m zum Zeitpunkt t = ∞

Instationäre Bedingung:
Veränderung des Grundwasserspiegels mit der Zeit nach Absenkung an den Standorten x = 100, 1500, 2900 m

Abb. 2. Vergleich numerisches Modell (ASM) von Kinzelbach und Rausch 1995 mit analytischem Modell: linker Rand Vorfluterwasserstand; rechter Rand Zufluß = konstant >0

Ein Vergleich des analytischen Modells mit einem numerischen Modell (ASM von Kinzelbach und Rausch 1995), anhand eines konstruierten Aquifers, ergibt für die stationäre wie für die instationäre Lösung gute Übereinstimmung mit einer maximalen Abweichung von 5cm bei stationärer Bedingung und 4cm bei instationärer Bedingung. Die Abweichung läßt sich dadurch erklären, daß für das analytische Modell die vereinfachende linearisierten Boussinesq-Gleichung statt der Laplace-Gleichung verwendet wird.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Um die Aquifer-Fließgewässer-Interaktion in Auengebieten zu simulieren, wird ein mathematisches Modell entwickelt. Dieses Modell ist physikalisch basiert und benötigt eine geringe Informationsdichte über den Aquifer und geringe Rechenzeiten, so daß auch Langzeitsimulationen auf PC´s möglich sind.

In einem weiteren Schritt soll das Modell an Transsekten im Ohremündungsgebiet bei Elbe-km 350 angepaßt werden und letztlich mit einen Bodenwassermodell, zur Erfassung der Infiltration aus Niederschlägen und Überflutungsflächen, verschnitten werden.

Der systematische Fehler, der sich aus der für die analytischen Lösung notwendigen Vereinfachungen ergibt, kann toleriert werden, da das Resultat nicht die exakte Wiedergabe von Grundwasserganglinien, sondern die statistische Beschreibung der Dynamik von Wasserhaushaltsgrößen über einen längeren Zeitraum zum Ziel hat.

Literatur

Govidaraju, R.S., Koelliker, J.K. (1994): Applicability of linearized Boussinesq equation for modeling bank storange under uncertain aquifer parameters. J. Hydrol., 157. S. 349-366

Hall, R.H. u. Moench, A.F. (1972) Application of the convolution equation to stream-aquifer relationships. Wat. Resour. Res. 8 (2), S. 487-493

Kinzelbach, W., Rausch, R. (1995): Grundwassermodellierung. Gebrüder Borntraeger. Stuttgart

Powers, D.L. (1979): Boundary Value Problems. Academic Press, New York

Wald, J., Kron, K., Buck, W., Plate, E.J. (1986): Generation of storm runoff in an area with a high groundwater table.- In: Conjunctive Water Use. Understanding and managing surface water-groundwater interactions. IAHS Publication No. 165. Gorelick S.M. (Ed.). Wallingford

Workman, S.R., Serrano, S.E., Liberty, K. (1997): Development and application of an analytical model of stream/aquifer interaction. J. Hydrol., 200, S. 149-163